

2010 年考研（数学一）真题试卷

全部题型 1. 选择题 2. 填空题 3. 解答题

选择题

下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$
 (A) 1. (B) e. (C) e^{a-b} . (D) e^{b-a} .

【 】

正确答案: C

解析:

【分析一】 用求幂指数型极限的一般方法, 求

$$I = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}},$$

归结为求
$$\begin{aligned} W &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} - 1 + 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \cdot \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right] = a - b. \end{aligned}$$

因此 $I = e^{a-b}$, 故应选 (C).

【分析二】 用求 1^∞ 型极限的方法.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-a)(x+b) + (a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^{\frac{(a-b)(x+b) + (a-b)x + ab}{(a-b)x + ab} \cdot \frac{x}{(a-b)(x+b)}} = e^{a-b}. \end{aligned}$$

因此选 (C).

2. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$
 =
 (A) x . (B) z . (C) $-x$. (D) $-z$.

【 】

正确答案: B

解析:

【分析一】 方程 $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 两边求全微分得

$$F'_1 d(\frac{y}{x}) + F'_2 d(\frac{z}{x}) = 0, \text{ 即 } F'_1 \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} + F'_2 \cdot \frac{xdz - zdx}{x^2} = 0,$$

整理得 $dz = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2} dx - \frac{F'_1}{F'_2} dy.$

$\Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2} - \frac{yF'_1}{F'_2} = z.$ 故选(B).

【分析二】 方程记为 $G(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$. 代公式分别求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial G / \partial x}{\partial G / \partial z} = - \frac{F'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2 \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial G / \partial y}{\partial G / \partial z} = - \frac{F'_1 \cdot \frac{1}{x}}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = - \frac{F'_1}{F'_2},$$

$\Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{yF'_1}{F'_2} + z\right) + \left(-\frac{yF'_1}{F'_2}\right) = z.$ 故选(B).

【分析三】 方程 $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 两边分别对 x, y 求偏导数, 注意 $z = z(x, y)$, 由复合函数求导法得

$$F'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2 \cdot \left(-\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$F'_1 \cdot \frac{1}{x} + F'_2 \cdot \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

解出 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1}{F'_2}.$

$\Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{yF'_1}{F'_2} + z\right) + \left(-\frac{yF'_1}{F'_2}\right) = z.$ 故选(B).

3

设 m, n 均是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt{x}} dx$ 的收敛性

- (A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.
(C) 与 m, n 的取值都有关. (D) 与 m, n 的取值都无关.

正确答案: D

解析:

【分析】 这是以 $x = 0, x = 1$ 为瑕点的瑕积分.

$$I \stackrel{\text{记}}{=} \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx \stackrel{\text{记}}{=} I_1 + I_2,$$

仅当 I_1, I_2 均收敛时, 瑕积分 I 才收敛, 否则 I 就发散.

这里不能按反常积分敛散性概念, 通过求原函数的极限的方法来判断敛散性, 因而只能按反常积分敛散性判别法则来判断. 这里的被积函数是正值函数, 有如下法则:

设 $f(x)$ 在 (a, b) 非负, $\forall [\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可积, 又设 $x = a$ (或 $x = b$) 是 $f(x)$ 的瑕点, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} (x-a)^p f(x) = l \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^p f(x) = l),$$

则当 $p < 1$ 且 $0 \leq l < +\infty$ 时瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

$$\text{由 } f(x) \stackrel{\text{记}}{=} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{\left((-x)^2\right)^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} = x^{\frac{2}{n}-\frac{1}{n}} (x \rightarrow 0+)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}} f(x) = 1.$$

$$\text{又 } m, n \text{ 为正整数, } \Rightarrow p \stackrel{\text{记}}{=} \frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \text{ 收敛.}$$

$$\forall 0 < p < 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p \frac{\ln^{\frac{2}{n}}(1-x)}{\sqrt[n]{x}} = 0 \quad (\forall \text{ 正整数 } n, m).$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \text{ 收敛.}$$

因此, \forall 正整数 m, n , $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 均收敛, 故选 (D).

4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$$

$$(A) \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

$$(B) \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$$

$$(C) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$$

$$(D) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

正确答案: D

解析:

【分析】 将和式改写

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)n^2\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

方法 1° σ_n 看成两个定积分的积分和的乘积. 由

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

故选(D).

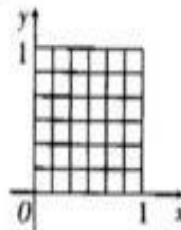
方法 2° σ_n 看成是二重积分的一个积分和.

记 D 是正方形区域: $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$.

将 D 的长与宽均 n 等分, 分成 n^2 个小正方形, 每个小正方形的面积是 $\frac{1}{n^2}$, 于是 σ_n

是 $f(x, y)$ 在 D 上的一个积分和.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{n^2} = \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D \frac{dx dy}{(1+x)(1+y^2)} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.\end{aligned}$$



故选(D).

5 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵. 若 $AB = E$, 则

- (A) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$. (B) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$.
(C) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$. (D) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.

【 】

正确答案: A

解析

【分析】 因为 $AB = E$ 是 m 阶单位矩阵, 知 $r(AB) = m$.

又因 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$, 故

$$m \leq r(A), \quad m \leq r(B). \quad ①$$

另一方面, A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则有

$$r(A) \leq m, \quad r(B) \leq m. \quad ②$$

比较 ①、② 得 $r(A) = m, r(B) = m$. 所以应选 (A).

设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = 0$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad (C) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

正确答案: D

解析:

【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 知 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$.

那么对于 $A^2 + A = 0$ 有 $(\lambda^2 + \lambda)\alpha = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0$.

因此矩阵 A 的特征值只能是 -1 或 0 .

又因 A 是实对称矩阵, A 可以相似对角化 (即 $A \sim \Lambda$), 而 Λ 的对角线上的元素即是矩阵 A 的特征值, 再由相似矩阵有相同的秩 $r(A) = r(\Lambda) = 3$, 可知

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

故应选 (D).

$$7. \text{ 设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \text{ 则 } P\{X=1\} = \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$(A) 0, \quad (B) \frac{1}{2}, \quad (C) \frac{1}{2} - e^{-1}, \quad (D) 1 - e^{-1}.$$

[]

正确答案: C

解析

$$\text{【分析】 } P\{X=1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}.$$

故应选(C).

8. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若 $f(x) =$

$$\begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0) \text{ 为概率密度, 则 } a, b \text{ 应满足}$$

(A) $2a + 3b = 4.$

(B) $3a + 2b = 4.$

(C) $a + b = 1.$

(D) $a + b = 2.$

【 】

正确答案: A

解析

【分析】 易见 $f(x) \geq 0$, 由于 $f_1(x)$ 是标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 是 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 因此有

$$f_1(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 是概率密度函数, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 a f_1(x) dx + \int_0^{+\infty} b f_2(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^3 \frac{b}{4} dx \\ &= \frac{a}{2} + \frac{3}{4}b = 1, \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2a + 3b = 4$. 故应选(A).

填空题

9.

$$\text{设 } \begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases} \quad \text{求 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

正确答案: 0

解析:

$$\text{【分析】 先求 } \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} = -e^t \ln(1+t^2).$$

$$\text{再求 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}[-e^t \ln(1+t^2)] \frac{dt}{dx} = \left[-e^t \ln(1+t^2) - \frac{2te^t}{1+t^2}\right](-e^t),$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0.$$

10.

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

正确答案: -4π

解析

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx & \xrightarrow[t = \sqrt{x}]{t = \sqrt{x}} \int_0^{\pi} (t \cos t) \cdot 2t dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 d \sin t \\ & \xrightarrow{\text{分部积分}} 2t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} t \sin t dt = 4 \int_0^{\pi} t d \cos t \\ & \xrightarrow{\text{分部积分}} 4t \cos t \Big|_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} \cos t dt = -4\pi. \end{aligned}$$

11. 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x| (x \in [-1, 1])$, 起点是 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 则曲线积分

$$\int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

正确答案: 0

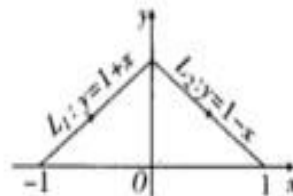
解析:

【分析一】 将被积表达式分为两部分,一部分易求出原函数,另一部分直接化为定积分.

$$\begin{aligned} I &= \int_L xy dx + x^2 dy = \int_L 2xy dx + x^2 dy - \int_L xy dx \\ &= \int_L d(x^2 y) - \int_{-1}^1 x(1 - |x|) dx = x^2 y \Big|_{(-1,0)}^{(1,0)} - 0 = 0. \end{aligned}$$

【分析二】 直接化为定积分. 曲线 L 如图所示,要分为两段 $L = L_1 \cup L_2$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{L_1} xy dx + x^2 dy + \int_{L_2} xy dx + x^2 dy \\ &= \int_{-1}^0 [x(1+x) + x^2] dx + \int_0^1 [x(1-x) + x^2 \cdot (-1)] dx \\ &= \int_{-1}^0 x dx + \int_{-1}^0 2x^2 dx - \int_0^1 2x^2 dx = 0 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0. \end{aligned}$$



12. 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} =$ _____.

正确答案: 2/3

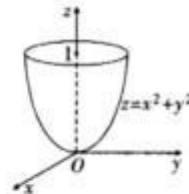
解析:

【分析】 Ω 如图所示,按形心公式

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dV}{\iiint_{\Omega} dV}$$

用先二后一的公式分别求这两个三重积分. 与 z 轴垂直的截面区域 $D(z)$ ($D(z): x^2 + y^2 \leq z$) 的面积为 πz . 又

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dV &= \int_0^1 dz \iint_{D(z)} z dx dy = \int_0^1 z \cdot \pi z dz = \frac{1}{3} \pi, \\ \iiint_{\Omega} dV &= \int_0^1 dz \iint_{D(z)} dx dy = \int_0^1 \pi z dz = \frac{1}{2} \pi, \end{aligned}$$



因此
$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{3} \pi}{\frac{1}{2} \pi} = \frac{2}{3}.$$

13. 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$. 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ _____.

正确答案: 6

解析

【分析】 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 所生成的向量空间的维数是 2, 可知向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$. 那么对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 作初等变换, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以 $a = 6$.

14. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{C}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$, 则 $EX^2 =$ _____.

正确答案: 2

解析

【分析】 由于概率函数的和一定为 1, 即

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!} = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = C \cdot e = 1,$$

因此 $C = e^{-1}$, 于是 $P\{X = k\} = \frac{1}{k!}e^{-1}, k = 0, 1, 2, \dots$. 由此可知, 随机变量 X 服从参数 $\lambda = 1$ 的泊松分布, 进而有 $EX = DX = \lambda = 1$, 所以

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = 1 + 1 = 2.$$

解答题

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

正确答案:

【分析与求解】 这是求二阶线性常系数非齐次方程的通解.

1° 由相应的特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 得特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow$ 相应齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

2° 非齐次项 $f(x) = 2xe^{\alpha x}, \alpha = 1$ 是单特征根, 故设原方程的特解

$$y^* = x(ax + b)e^x.$$

代入原方程得

$$ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b - 3[ax^2 + (2a + b)x + b] + 2(ax^2 + bx) = 2x,$$

$$\text{即} \quad -2ax + 2a - b = 2x,$$

$$\Rightarrow \quad a = -1, b = -2.$$

3° 原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x(x + 2)e^x, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为两个任意常数.}$$

16. 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

正确答案:

【分析与求解】 $f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt.$

先求出 $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + x^2 e^{-x^2} \cdot 2x - x^2 e^{-x^2} \cdot 2x = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt,$

由 $f'(x) = 0$ 解得 $x = 0, x^2 = 1$, 即 $x = 0, x = \pm 1$. 进一步得

$$f'(x) = \begin{cases} < 0, & -\infty < x < -1, \\ = 0, & x = -1, \\ > 0, & -1 < x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ < 0, & 0 < x < 1, \\ = 0, & x = 1, \\ > 0, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

因此, $f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$, 单调增区间是 $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

极大值 $f(0) = \int_0^1 te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$, 极小值 $f(\pm 1) = 0$.

17 (I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt (n = 1, 2, \dots)$ 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt (n = 1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

正确答案:

【分析与求解】 (I) 先比较 $[0, 1]$ 区间上的被积函数. 易知,

$$0 < \ln(1+t) < t, t \in (0, 1]$$

$$\forall n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$$

$$\ln^n(1+t) < t^n, t \in (0, 1]$$

$$\Rightarrow |\ln t| \ln^n(1+t) < t^n |\ln t|, t \in (0, 1).$$

$$\text{又 } \lim_{t \rightarrow 0+} |\ln t| \ln^n(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0+} t^n |\ln t| = 0,$$

\Rightarrow 若 $f(t) \stackrel{\text{记}}{=} |\ln t| \ln^n(1+t), g(t) \stackrel{\text{记}}{=} t^n |\ln t|$, 可补充定义 $f(0) = 0, g(0) = 0$, 则 $f(t), g(t)$ 在 $[0, 1]$ 连续且

$$f(t) \leq g(t), t \in [0, 1]$$

因此 $\int_0^1 f(t) dt < \int_0^1 g(t) dt,$

即 $\int_0^1 |\ln t| \ln^n(1+t) dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt.$

(II) 易求得

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n |\ln t| dt &= - \int_0^1 t^n \ln t dt = - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t dt^{n+1} \\ &= - \frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t \Big|_{0+}^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{1}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

由题(I)有

$$0 < u_n = \int_0^1 |\ln t| \ln^n(1+t) dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

由夹逼定理 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$

18.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

正确答案

【分析与求解】 求和函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1} = x S_1(x),$$

转化为求
$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}.$$

易逐项求导得

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \quad (|x| < 1).$$

又 $S_1(0) = 0$, 于是

$$S_1(x) = \int_0^x S_1'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x.$$

因此 $S(x) = x \arctan x$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1} = x \arctan x, \quad x \in [-1, 1]. \quad \textcircled{*}$$

$[-1, 1]$ 就是左端幂级数的收敛域.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$ 有相同的收敛域, 又逐项求导保持收敛半径不变, 所以

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1}$ 的收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = \pm 1$ 时 $\textcircled{*}$ 式左端级数收敛, 右端函数 $x \arctan x$ 连续, 故 $\textcircled{*}$

式在 $x = \pm 1$ 处也成立.

19. 设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 是椭球面 } S \text{ 位于曲线 } C \text{ 上方的部分}.$$

正确答案:

【分析与求解】 先求点 P 的轨迹曲线 C .

椭球面 $S: F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 = 0$ 上动点 P 的法向量

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (2x, 2y - z, 2z - y).$$

若 S 在 P 点处的切平面垂直于 xOy 平面, 则 P 点处 S 的法向量 \mathbf{n} 应垂直于 Oz 轴, 因而

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0, \text{ 即 } 2z - y = 0.$$

因为 $P(x, y, z)$ 点在椭球面上, 故所求的 P 点应满足

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 = 0, \\ 2z - y = 0. \end{cases}$$

这就是所求的 P 点轨迹曲线 C 的方程. 为简化起见, 将第二式 $z = \frac{y}{2}$ 代入第一式, 可得所求轨迹 C 的方程为

$$\begin{cases} x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1, & (\text{它是椭圆柱面与平面的交线,}) \\ 2z - y = 0. \end{cases}$$

下求曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

记曲面 Σ 的方程为 $z = z(x, y)$, 它在 xy 平面上的投影区域为 D , 按第一类曲面积分计算公式

$$I = \iint_D \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

为求出它的值, 我们必须:

1° 求出投影区域 D . 由前面的分析可知,

$$D: x^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 1, \text{ 即 } x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} \leq 1 \text{ (它是曲线 } C \text{ 在 } xy \text{ 平面上的投影曲线所围成的).}$$

2° 求出 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Σ 的方程即 $z = z(x, y)$ 满足的方程是 $x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$, 两边分别对 x, y 求偏导数, 得

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2z - y};$$

$$2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} - z - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(2y - z)}{2z - y},$$

从而

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(2z - y)^2} + \frac{(2y - z)^2}{(2z - y)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4(x^2 + y^2 + z^2 - yz) + y^2 + z^2 - 4yz}{(2z - y)^2}} = \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|2z - y|}. \end{aligned}$$

$$3^\circ \text{ 现可得 } I = \iint_D (x + \sqrt{3}) dx dy = \sqrt{3} \iint_D dx dy = \sqrt{3} \cdot \pi \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\pi,$$

其中 $\iint_D x dx dy = 0$ (D 关于 y 轴对称).

20.

设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解,

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

正确答案

【解】 (I) 因为线性方程组 $Ax = b$ 有 2 个不同的解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < n$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

知 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 必有 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$. 此时线性方程组无解.

而当 $\lambda = -1$ 时,

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right],$$

若 $a = -2$, 则 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解.

故 $\lambda = -1, a = -2$.

(II) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时,

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

所以方程组 $Ax = b$ 的通解为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)^T + k(1, 0, 1)^T$, 其中 k 是任意常数.

21

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T$.

(I) 求矩阵 A ;

(II) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

正确答案

【解】 (1) 二次型 $x^T A x$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准型为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明二次型矩阵 A 的特征值是 1, 1, 0. 又因 Q 的第 3 列是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, 说明 $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ 是矩阵 A 关于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量. 因为 A 是实对称矩阵, 特征值不同特征向量相互正交. 设 A 关于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\alpha^T \alpha_3 = 0$, 即

$$x_1 + x_3 = 0.$$

取 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$, 那么 α_1, α_2 是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$ 有

$$\begin{aligned} A &= (\alpha_1, \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(II) 由于矩阵 A 的特征值是 1, 1, 0, 那么 $A + E$ 的特征值是 2, 2, 1. 因为 $A + E$ 的特征值全大于 0, 所以 $A + E$ 正定.

【注】 本题也可把 α_1, α_2 单位化处理(它们已经正交!)构造出正交矩阵 Q , 即

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 于是有 } A = Q \Lambda Q^T = \dots$$

22

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}$, $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$, 求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

正确答案

【解法一】 利用泊松积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ 可得

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dx dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A\pi, \end{aligned}$$

计算得知 $A = 1/\pi$.

$$\begin{aligned} \text{又} \quad f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \cdot e^{-(y-x)^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}.$$

【解法二】 利用正态分布概率密度的积分为 1, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt &= 1, \\ 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dx dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\frac{1}{2})^2}} dy \\ &= A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2(\frac{1}{2})^2}} dx = A\pi, \end{aligned}$$

于是可得 $A = 1/\pi$.

$$\begin{aligned} \text{又} \quad f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \cdot e^{-(y-x)^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\frac{1}{2})^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}.$$

【解法三】 依题意 $f(x, y)$ 是以 e 为底的二元指数函数且其指数为 x, y 的二次三项式, 因此它是二元正态分布的联合概率密度, 即

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}.$$

易见参数 $\mu_1 = \mu_2 = 0$, 且 $-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} = -2$, $-\frac{2\rho}{2(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} = 2$, $-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} = -1$.

$$\text{解方程组} \quad \begin{cases} 4(1-\rho^2)\sigma_1^2 = 1, \\ 2(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2 = \rho, \\ 2(1-\rho^2)\sigma_2^2 = 1, \end{cases} \quad \text{可得} \quad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_2 = 1, \quad \rho = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

于是 $A = (2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^{-1} = 1/\pi$.

根据二维正态分布的边缘分布为一维正态分布, 于是有 $X \sim N(0, \frac{1}{2})$, 即

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2(\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

$$\text{因此} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}.$$

23.

设总体 X 的概率分布为 $\frac{X}{P} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1-\theta & \theta-\theta^2 & \theta^2 \end{matrix}$, 其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i=1,2,3$). 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

正确答案

【解】 根据简单随机样本的性质, 样本 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且与总体 X 同分布, 因此

$$P\{X_i = 1\} = 1 - \theta, \quad P\{X_i \neq 1\} = \theta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

在 n 次独立观测中取 1 的个数 N_1 是个随机变量, 且 $N_1 \sim B(n, 1-\theta)$. 同理 $N_2 \sim B(n, \theta-\theta^2)$, $N_3 \sim B(n, \theta^2)$. 于是

$$\begin{aligned} ET &= E\left(\sum_{i=1}^3 a_i N_i\right) = a_1 EN_1 + a_2 EN_2 + a_3 EN_3 \\ &= na_1(1-\theta) + a_2 n(\theta-\theta^2) + a_3 n\theta^2 = na_1 + n(a_2 - a_1)\theta + n(a_3 - a_2)\theta^2. \end{aligned}$$

若 T 为 θ 的无偏估计, 则 $ET = \theta$, 即

$$na_1 + n(a_2 - a_1)\theta + n(a_3 - a_2)\theta^2 = \theta.$$

解出 $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1/n$. 从而可知 $T = \frac{N_2 + N_3}{n}$. 于是

$$DT = D\left(\frac{N_2 + N_3}{n}\right) = D\left(1 - \frac{N_1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} DN_1 = \frac{1}{n^2} n(1-\theta)\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$