

2010 年研究生入学考试（数二）真题试卷

全部题型 1. 选择题 2. 填空题 3. 解答题

选择题

下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[]

正确答案: B

解析

【分析】 $f(x)$ 只有间断点 $x = 0, x = \pm 1$. 由于

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)|x|},$$

又 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$, 故 $x = -1$ 是无穷间断点.

而 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm 1$, 故 $x = 1, 0$ 不是无穷间断点.

因此选(B).

设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则

2. (A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.
(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$. (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.

[]

正确答案: A

解析

【分析】 按题意

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = q(x),$$

$$\begin{aligned} \text{而 } (\lambda y_1 + \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda[y_1' + p(x)y_1] + \mu[y_2' + p(x)y_2] \\ &= \lambda q(x) + \mu q(x) = (\lambda + \mu)q(x), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda + \mu = 1.$$

$$\text{又 } (\lambda y_1 - \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } (\lambda y_1 - \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) &= \lambda[y_1' + p(x)y_1] - \mu[y_2' + p(x)y_2] \\ &= \lambda q(x) - \mu q(x) = (\lambda - \mu)q(x), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda - \mu = 0.$$

$$\text{由 } \begin{cases} \lambda + \mu = 1, \\ \lambda - \mu = 0, \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{2}.$$

因此选(A).

3. 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a =$
 (A) $4e$. (B) $3e$. (C) $2e$. (D) e .

[]

正确答案: C

解析

【分析】 设 $y = x^2$ 与 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切的切点为 (x_0, y_0) , 则

$$\begin{cases} x_0^2 = a \ln x_0, \\ (x^2)'|_{x_0} = (a \ln x)'|_{x_0}, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_0^2 = a \ln x_0, \\ 2x_0 = \frac{a}{x_0}, \end{cases} \Rightarrow x_0 = e^{\frac{1}{2}}, \quad a = 2e;$$

因此选(C).

4. 设 m, n 均是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^m(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性
 (A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.
 (C) 与 m, n 的取值都有关. (D) 与 m, n 的取值都无关.

[]

正确答案: D

解析:

【分析】 这是以 $x = 0, x = 1$ 为瑕点的瑕积分.

$$I \stackrel{\text{记}}{=} \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx \stackrel{\text{记}}{=} I_1 + I_2,$$

仅当 I_1, I_2 均收敛时, 瑕积分 I 才收敛, 否则 I 就发散.

这里不能按反常积分敛散性概念, 通过求原函数的极限的方法来判断敛散性, 因而只能按反常积分敛散性判别法则来判断, 这里的被积函数是正值函数, 有如下法则:

设 $f(x)$ 在 (a, b) 非负, $\forall [\alpha, \beta] \subset (a, b), f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可积, 又设 $x = a$ (或 $x = b$) 是 $f(x)$ 的瑕点, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} (x-a)^p f(x) = l \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^p f(x) = l),$$

则当 $p < 1$ 且 $0 \leq l < +\infty$ 时瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

$$\text{由 } f(x) \stackrel{\text{记}}{=} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{\left((-x)^2\right)^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} = x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}} (x \rightarrow 0+)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}} f(x) = 1.$$

$$\text{又 } m, n \text{ 为正整数, } \Rightarrow p \stackrel{\text{记}}{=} \frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \text{ 收敛.}$$

$$\forall 0 < p < 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p \frac{\ln^{\frac{2}{n}}(1-x)}{\sqrt[n]{x}} = 0 \quad (\forall \text{ 正整数 } n, m).$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \text{ 收敛.}$$

因此, \forall 正整数 $m, n, \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 均收敛, 故选 (D).

设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_1 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

5. (A) x . (B) z . (C) $-x$. (D) $-z$.

[]

正确答案: B

解析:

【分析一】 方程 $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 两边求全微分得

$$F'_1 d(\frac{y}{x}) + F'_2 d(\frac{z}{x}) = 0,$$

$$F'_1 \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} + F'_2 \cdot \frac{xdz - zdx}{x^2} = 0,$$

整理得

$$dz = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2} dx - \frac{F'_1}{F'_2} dy.$$

\Rightarrow

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2} - \frac{yF'_1}{F'_2} = z.$$

因此选(B).

【分析二】 方程记为 $G(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$. 代公式分别求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial G / \partial x}{\partial G / \partial z} = -\frac{F'_1 \cdot (-\frac{y}{x^2}) + F'_2 \cdot (-\frac{z}{x^2})}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial G / \partial y}{\partial G / \partial z} = -\frac{F'_1 \cdot \frac{1}{x}}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{F'_1}{F'_2},$$

\Rightarrow

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{yF'_1}{F'_2} + z) + (-\frac{yF'_1}{F'_2}) = z.$$

因此选(B).

【分析三】 方程 $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 两边分别对 x, y 求偏导数, 注意 $z = z(x, y)$, 由复合函数求导法得

$$F'_1 \cdot (-\frac{y}{x^2}) + F'_2 \cdot (-\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x}) = 0,$$

$$F'_1 \cdot \frac{1}{x} + F'_2 \cdot \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

解出 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1}{F'_2}.$$

\Rightarrow

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{yF'_1}{F'_2} + z) + (-\frac{yF'_1}{F'_2}) = z.$$

因此选(B).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$$

6. (A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

【 】

正确答案: D

解析:

【分析】 将和式改写

$$\begin{aligned}\sigma_n &\stackrel{\text{记}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)n^2\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

方法 1° σ_n 看成两个定积分的积分和的乘积. 由

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.\end{aligned}$$

因此选(D).

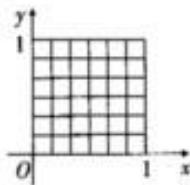
方法 2° σ_n 看成是二重积分的一个积分和.

记 D 是正方形区域: $|(x, y)| 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1|$, $f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$.

将 D 的长与宽均 n 等分, 分成 n^2 个小正方形, 每个小正方形的面积是 $\frac{1}{n^2}$, 于是 σ_n

是 $f(x, y)$ 在 D 上的一个积分和.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{n^2} = \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D \frac{dx dy}{(1+x)(1+y^2)} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.\end{aligned}$$



因此选(D).

7. 设向量组 I : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II : $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示. 下列命题正确的是

- (A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$. (B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$.
(C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$. (D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

[]

正确答案: A

解析:

【分析】 因为向量组 I 可由 II 线性表出, 所以

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq s.$$

如果向量组 I 线性无关, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r$. 可见(A) 正确.

若 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0, 0)^T, \beta_1 = (1, 0, 0)^T, \beta_2 = (0, 1, 0)^T, \beta_3 = (0, 1, 0)^T$, 可知(B) 不正确.

若 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 0)^T, \alpha_3 = (3, 0, 0)^T, \beta_1 = (1, 0, 0)^T, \beta_2 = (0, 1, 0)^T$, 可知(C) 不正确.

关于(D), 请同学举一个简单的反例说明其不正确.

8. 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = 0$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

正确答案: D

解析

【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 知 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$.

那么对于 $A^2 + A = 0$ 有 $(\lambda^2 + \lambda)\alpha = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0$.

因此矩阵 A 的特征值只能是 -1 或 0 .

又因 A 是实对称矩阵, A 可以相似对角化 (即 $A \sim \Lambda$), 而 Λ 的对角线上的元素即是矩阵 A 的特征值, 再由相似矩阵有相同的秩 $r(A) = r(\Lambda) = 3$, 可知

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

故应选 (D).

填空题

9.

3 阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

正确答案

$C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

解析:

【分析】 特征方程为

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \text{ 即 } (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2) = 0,$$

于是得特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ ($i = \sqrt{-1}$).

因此, 通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

10. 曲线 $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ 的渐近线方程为_____.

正确答案: $y=2x$

解析

【分析】 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = 0,$$

因此,有斜渐线 $y = 2x$,无垂直渐近线.渐近线方程为 $y = 2x$.

11. 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

正确答案

解析

【分析一】 用麦克劳林公式.已知

$$\ln(1 + t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} + o(t^n) \quad (t \rightarrow 0),$$

$$\text{令 } t = -2x \Rightarrow$$

$$y = \ln(1 - 2x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (-2x)^k}{k} + o(x^n) = - \sum_{k=1}^n \frac{2^k x^k}{k} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0),$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(0) = \frac{-2^n}{n} \cdot n! = -2^n (n-1)! \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

其中 $0! = 1$.

【分析二】 用归纳法.由

$$y = \ln(1 - 2x) \Rightarrow y' = \frac{-2}{1 - 2x} = -2(1 - 2x)^{-1},$$

$$\Rightarrow y'' = -2(-1)(1 - 2x)^{-2}(-2) = -2^2(1 - 2x)^{-2},$$

$$y^{(3)} = -2^3 \cdot 2(1 - 2x)^{-3},$$

$$y^{(4)} = -2^4 \cdot 2 \cdot 3(1 - 2x)^{-4}, \dots$$

易归纳证明

$$y^{(n)} = -2^n (n-1)! (1 - 2x)^{-n}.$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(0) = -2^n (n-1)!.$$

12. 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时,对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长为_____.

正确答案

解析:

【分析】 按极坐标系下弧长计算公式,该对数螺线的弧长

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi} e^{\theta} d\theta = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1).$$

已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加,宽 w 以 3cm/s 的速率增加,则当 $l = 12\text{cm}, w =$

13. 5cm 时,它的对角线增加的速率为_____.

正确答案: $3(\text{cm/s})$

解析

【分析】 长方形长为 l , 宽为 w , 它们随时间 t 而变化, 依题设 l, w 的变化速率分别为

$$\frac{dl}{dt} = 2(\text{cm/s}), \quad \frac{dw}{dt} = 3(\text{cm/s}).$$

对角线长记为 $A, A = \sqrt{l^2 + w^2}$, 即 $A^2 = l^2 + w^2$, 两边分别对 t 求导得

$$2A \frac{dA}{dt} = 2l \frac{dl}{dt} + 2w \frac{dw}{dt}.$$

当 $l = 12(\text{cm}), w = 5(\text{cm})$ 时,

$$A = \sqrt{l^2 + w^2} = \sqrt{169} = 13(\text{cm}),$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = (12 \times 2 + 5 \times 3) / 13 = 3(\text{cm/s}).$$

因此对角线增加速率为 $3(\text{cm/s})$.

14. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

正确答案: 3

解析

【分析】 利用单位矩阵恒等变形, 有

$$A + B^{-1} = (B^{-1}B)A + B^{-1}(A^{-1}A) = B^{-1}(B + A^{-1})A = B^{-1}(A^{-1} + B)A.$$

$$\text{可见} \quad |A + B^{-1}| = |B^{-1}| \cdot |A^{-1} + B| \cdot |A| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

解答题

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

正确答案

【分析与求解】 $f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt$.

先求出 $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + x^2 e^{-x^4} \cdot 2x - x^2 e^{-x^4} \cdot 2x = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$,

由 $f'(x) = 0$ 解得 $x = 0, x^2 = 1$, 即 $x = 0, x = \pm 1$. 进一步得

$$f'(x) \begin{cases} < 0, & -\infty < x < -1, \\ = 0, & x = -1, \\ > 0, & -1 < x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ < 0, & 0 < x < 1, \\ = 0, & x = 1, \\ > 0, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

因此, $f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$, 单调增区间是 $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

极大值 $f(0) = \int_0^1 te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$, 极小值 $f(\pm 1) = 0$.

16. (I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

正确答案: 【分析与求解】 (I) 先比较 $[0, 1]$ 区间上的被积函数. 易知,

$$0 < \ln(1+t) < t, \quad t \in (0, 1]$$

$$\forall n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$$

$$\ln^n(1+t) < t^n, \quad t \in (0, 1]$$

$$\Rightarrow |\ln t| \ln^n(1+t) < t^n |\ln t|, \quad t \in (0, 1).$$

$$\text{又} \quad \lim_{t \rightarrow 0+} |\ln t| \ln^n(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0+} t^n |\ln t| = 0,$$

\Rightarrow 若 $f(t) \stackrel{\text{记}}{=} |\ln t| \ln^n(1+t)$, $g(t) \stackrel{\text{记}}{=} t^n |\ln t|$, 可补充定义 $f(0) = 0, g(0) = 0$, 则 $f(t), g(t)$ 在 $[0, 1]$ 连续且

$$f(t) \leq g(t), \quad t \in [0, 1]$$

$$\text{因此} \quad \int_0^1 f(t) dt < \int_0^1 g(t) dt,$$

$$\text{即} \quad \int_0^1 |\ln t| \ln^n(1+t) dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt.$$

(II) 易求得

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n |\ln t| dt &= - \int_0^1 t^n \ln t dt = - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t dt^{n+1} \\ &= - \frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{1}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

由题(I)有

$$0 < u_n = \int_0^1 |\ln t| \ln^n(1+t) dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

由夹逼定理 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

- 17 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$ 所确定, 其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数, 且 $\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6$, 已知 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

正确答案:

【分析与求解】 用参数求导法求出 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的表达式, 再由已知条件导出 $\Psi(t)$ 的二阶微分方程的初值问题, 最后解出 $\Psi(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\Psi'(t)}{2(t+1)}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Psi'(t)}{t+1} \right]'_t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \frac{(t+1)\Psi''(t) - \Psi'(t)}{(t+1)^2} \cdot \frac{1}{2(t+1)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(t+1)\Psi''(t) - \Psi'(t)}{(t+1)^3}. \end{aligned}$$

由已知条件 \Rightarrow

$$\frac{1}{4} \frac{(t+1)\Psi''(t) - \Psi'(t)}{(t+1)^3} = \frac{3}{4} \frac{1}{1+t},$$

即 $(t+1)\Psi''(t) - \Psi'(t) = 3(t+1)^2,$

又 $\Psi(1) = \frac{5}{2}, \Psi'(1) = 6.$

这是可降阶类型的二阶微分方程的初值问题. 令 $P = \Psi'(t)$, 得

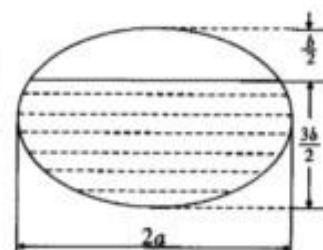
$$(t+1)P' - P = 3(t+1)^2, \text{ 即 } P' - \frac{1}{t+1}P = 3(t+1).$$

两边乘 $\mu(t) = e^{-\int \frac{1}{t+1} dt}$ 取 $\frac{1}{t+1}$ 得 $\left(\frac{1}{t+1}P \right)' = 3$. 两边积分, 并用 $P(1) = 6$ 得

$$\frac{1}{t+1}P = 3t, \text{ 即 } \Psi'(t) = 3t(t+1).$$

再积分, 并用 $\Psi(1) = \frac{5}{2}$ 得 $\Psi(t) = t^3 + \frac{3}{2}t^2.$

18. 一个高为 l 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时 (如图), 计算油的质量. (长度单位为 m , 质量单位为 kg , 油的密度为常数 $\rho kg/m^3$)



正确答案:

【分析与求解】 油的质量 $m = \rho V$, 其中 ρ 是油的密度常数, V 是油的体积. 贮油罐平放后油的体积是一柱体的体积, $V = S \cdot l$, 其中 S 是该柱体的截面积, l 是原柱体油罐的高, 截面如图所示, 是整个椭圆除去

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{b}{2} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a \right\}$$

部分, 即 $S = \pi ab - S_1$, 其中 S_1 是 D 的面积.

由于
$$S_1 = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{b}{2} \right) dx$$

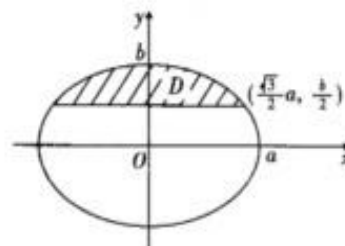
$$= 2b \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx - 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\stackrel{x = asint}{=} 2ba \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt - \frac{\sqrt{3}}{2}ab = ab \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt - \frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

$$= ab \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2}ab = ab \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

于是
$$S = \pi ab - ab \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) ab.$$

因此, 油的质量 $m = \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) ab l \rho.$



19. 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

正确答案:

【分析与求解】 u 是 x, y 的函数, 在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下, u 变成 ξ, η 的函数. 先由复合函数求导法, 导出 u 对 x, y 的一、二阶偏导数与 u 对 ξ, η 的一、二阶偏导数间的关系, 然后将方程

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

变形, 确定 a 与 b , 化成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

由复合函数求导法可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a+b) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} a + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} b \right) + b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} a + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} b \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

代入原方程得

$$\begin{aligned} & 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= (5a^2 + 12a + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (5b^2 + 12b + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + [8 + 12(a+b) + 10ab] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \end{aligned}$$

选 a, b 使得

$$\begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0, & \Rightarrow a = -2, -\frac{2}{5}, \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0, & \Rightarrow b = -2, -\frac{2}{5}. \\ 8 + 12(a+b) + 10ab \neq 0, \end{cases}$$

当 $a = b = -2$, 或 $a = b = -\frac{2}{5}$ 时, $8 + 12(a+b) + 10ab = 0$;

当 $a = -2, b = -\frac{2}{5}$, 或 $a = -\frac{2}{5}, b = -2$ 时, $8 + 12(a+b) + 10ab \neq 0$.

因此 $a = -2, b = -\frac{2}{5}$, 或 $a = -\frac{2}{5}, b = -2$.

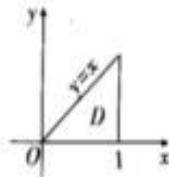
20 计算二重积分 $I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$, 其中 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$.

正确答案:

【分析与求解】 这是某二重积分 $\iint_D f(x,y) d\sigma$ 的极坐标表示,从表达式来看,在极坐标系中计算不方便,现先把它变回 Oxy 直角坐标系中,这就要确定 $f(x,y)$ 与积分区域 D .

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D r\sin\theta \sqrt{1-r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)} r dr d\theta \\ &= \iint_D y \sqrt{1-x^2+y^2} dx dy. \end{aligned}$$



由 D 的极坐标表示: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta}$, 可知 D 的边界线是: $y=0, y=x, x=1$,

D 如图所示.

现改为先对 y 积分,再对 x 积分的顺序来配置积分限,有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1-x^2+y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x (1-x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} dy^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{3} (1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 [1 - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx \\ &\stackrel{x=\sin\theta}{=} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta d\theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

21. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$. 证明:

存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

正确答案:

【分析与证明】 这是证明 $f(x)$ 的导函数存在某种特征点,要证: $\exists \xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$

使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$,

即 $[f'(\xi) - \xi^2] + [f'(\eta) - \eta^2] = 0$,

即证 $\left[f(x) - \frac{1}{3}x^3 \right]' \Big|_{x=\xi} + \left[f(x) - \frac{1}{3}x^3 \right]' \Big|_{x=\eta} = 0$.

依题设 ξ, η 分别位于 $(0, \frac{1}{2})$ 与 $(\frac{1}{2}, 1)$ 区间, 因此我们对 $F(x) \stackrel{\text{记}}{=} f(x) - \frac{1}{3}x^3$ 分别在 $[0, \frac{1}{2}]$ 与 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上用拉格朗日中值定理, 有

$\exists \xi \in (0, \frac{1}{2})$, 使得

$$\frac{F(\frac{1}{2}) - F(0)}{\frac{1}{2}} = F'(\xi), \text{ 即 } \frac{f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3}{\frac{1}{2}} = f'(\xi) - \xi^2 \quad (f(0)=0);$$

$\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得

$$\frac{F(1) - F(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = F'(\eta), \text{ 即 } \frac{f(1) - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3}{\frac{1}{2}} = f'(\eta) - \eta^2 \quad (f(1) = \frac{1}{3}).$$

两式相加即得

$$f'(\xi) - \xi^2 + f'(\eta) - \eta^2 = 0, \text{ 即 } f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2.$$

22. 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解,
- (I) 求 λ, a ;
- (II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

正确答案

【解】 (I) 因为线性方程组 $Ax = b$ 有两个不同的解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < n$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

知 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 必有 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$. 此时线性方程组无解.

而当 $\lambda = -1$ 时,

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right],$$

若 $a = -2$, 则 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解.

故 $\lambda = -1, a = -2$.

(II) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时,

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

所以方程组 $Ax = b$ 的通解为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T + k(1, 0, 1)^T$, 其中 k 是任意常数.

23. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵. 若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求 a, Q .

正确答案:

【分析】 因为 Q 是正交矩阵 $\Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$, 所以 $Q^T A Q = A$, 即 $Q^{-1} A Q = A$.
 A 的对角线上的元素是 A 的特征值, Q 是 A 的特征向量.

【解】 按已知条件, $(1, 2, 1)^T$ 是矩阵 A 的特征向量, 设特征值是 λ_1 , 那么

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 + (-2) + 4 = \lambda_1, \\ -1 + 6 + a = 2\lambda_1, \\ 4 + 2a + 0 = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ a = -1. \end{cases}$$

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4),$

知矩阵 A 的特征值是: $2, 5, -4$.

对 $\lambda = 5$, 由 $(5E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得基础解系 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$.

对 $\lambda = -4$, 由 $(-4E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得基础解系 $\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$.

因为 A 是实对称矩阵, 特征值不同特征向量相互正交, 故只需把 α_2, α_3 单位化, 有

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T.$$

那么令 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, 则 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix}.$