

2010 年考研数学三真题试卷

全部题型 1. 选择题 2. 填空题 3. 解答题

选择题

下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求

1. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

[]

正确答案: C

解析

【分析】 对任何常数 a 可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{x} + a e^x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} + a \lim_{x \rightarrow 0} e^x \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} e^x + a = a - 1, \end{aligned}$$

从而由题设可得 $a - 1 = 1$, 即 $a = 2$, 故应选(C).

2. 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则

- (A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.
(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$. (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.

[]

正确答案: A

解析:

【分析】 利用线性微分方程解的叠加原理, 把 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 代入方程可得

$$\begin{aligned} (\lambda y_1 + \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda[y_1' + p(x)y_1] + \mu[y_2' + p(x)y_2] \\ &= \lambda q(x) + \mu q(x) = (\lambda + \mu)q(x), \end{aligned}$$

按题设 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是方程的解, 从而必有 $\lambda + \mu = 1$. ①

同样, 把 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 代入方程可得

$$\begin{aligned} (\lambda y_1 - \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) &= \lambda[y_1' + p(x)y_1] - \mu[y_2' + p(x)y_2] \\ &= \lambda q(x) - \mu q(x) = (\lambda - \mu)q(x), \end{aligned}$$

按题设 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应齐次方程的解, 从而必有 $\lambda - \mu = 0$. ②

联立 ①、② 解得 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, 应选(A).

3. 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x) < 0$. 若 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是
- (A) $f'(a) < 0$. (B) $f'(a) > 0$.
(C) $f''(a) < 0$. (D) $f''(a) > 0$.

[]

正确答案: B

解析:

【分析】 利用二阶可导函数 $F(x)$ 在点 $x = x_0$ 处取得极大值的一个充分条件是 $F'(x_0) = 0$ 且 $F''(x_0) < 0$ 来解决本题.

设 $F(x) = f(g(x))$, 由题设知 $F(x)$ 二阶可导, 且

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= [f(g(x))]' \big|_{x=x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0) = f'(a)g'(x_0) = 0, \\ F''(x_0) &= [f(g(x))]' \big|_{x=x_0}' = f''(g(x_0))[g'(x_0)]^2 + f'(g(x_0))g''(x_0) \\ &= f'(a)g''(x_0), \end{aligned}$$

因为 $g''(x_0) < 0$, 即 $F''(x_0)$ 与 $f'(a)$ 反号, 从而当 $f'(a) > 0$ 时就有 $F'(x_0) = 0$ 且 $F''(x_0) < 0$, 即 $x = x_0$ 是 $F(x) = f(g(x))$ 的一个极大值点, 故应选(B).

4. 设 $f(x) = \ln^{10} x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{\frac{1}{10}}$, 则当 x 充分大时有
- (A) $g(x) < h(x) < f(x)$. (B) $h(x) < g(x) < f(x)$.
(C) $f(x) < g(x) < h(x)$. (D) $g(x) < f(x) < h(x)$.

[]

正确答案: C

解析:

【分析】 求解本题的依据是: 由极限的不等式性质可得, 若函数 $F(x) > 0, G(x) > 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \alpha < 1$, 则存在 $x_0 > 0$ 使得当 $x > x_0$ 时 $\frac{F(x)}{G(x)} < 1$ 成立, 即当 x 充分大时必有 $F(x) < G(x)$ 成立.

当 $x > 1$ 时函数 $f(x) = \ln^{10} x$, $g(x) = x$ 与 $h(x) = e^{\frac{1}{10}}$ 都是正函数, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^9 x}{x} = 10 \times 9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^8 x}{x} = \cdots = 10! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{1}{10}}} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{10}}} = 0. \end{aligned}$$

由此即知当 x 充分大时同时成立 $f(x) < g(x)$ 与 $g(x) < h(x)$, 故 $f(x) < g(x) < h(x)$ 当 x 充分大时成立, 应选(C).

5. 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示. 下列命题正确的是
- (A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$. (B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$.
(C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$. (D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

[]

正确答案: A

解析:

【分析】 因为向量组 I 可由 II 线性表出,所以

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq s.$$

如果向量组 I 线性无关,则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r$, 可见(A) 正确.

若 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0, 0)^T, \beta_1 = (1, 0, 0)^T, \beta_2 = (0, 1, 0)^T, \beta_3 = (0, 1, 0)^T$, 可知(B) 不正确.

若 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 0)^T, \alpha_3 = (3, 0, 0)^T, \beta_1 = (1, 0, 0)^T, \beta_2 = (0, 1, 0)^T$, 可知(C) 不正确.

关于(D), 请同学举一个简单的反例说明其不正确.

6.

设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = 0$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于

(A)
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

(B)
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

(C)
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

(D)
$$\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

【 】

正确答案: D

解析:

【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 知 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$.

那么对于 $A^2 + A = 0$ 有 $(\lambda^2 + \lambda)\alpha = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0$.

因此矩阵 A 的特征值只能是 -1 或 0 .

又因 A 是实对称矩阵, A 可以相似对角化(即 $A \sim \Lambda$), 而 Λ 的对角线上的元素即是矩阵 A 的特征值, 再由相似矩阵有相同的秩 $r(A) = r(\Lambda) = 3$, 可知

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

故应选(D).

7.

$$(7) \text{ 设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases} \text{ 则 } P\{X = 1\} =$$

$$(A) \ 0, \quad (B) \ \frac{1}{2}, \quad (C) \ \frac{1}{2} - e^{-1}, \quad (D) \ 1 - e^{-1}.$$

[]

正确答案: C

解析:

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P\{X = 1\} &= P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} = F(1) - F(1-0) \\ &= 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}. \end{aligned}$$

故应选(C)。

8.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若 $f(x) =$

$$\begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0) \text{ 为概率密度, 则 } a, b \text{ 应满足}$$

$$\begin{aligned} (A) \ 2a + 3b &= 4, & (B) \ 3a + 2b &= 4, \\ (C) \ a + b &= 1, & (D) \ a + b &= 2. \end{aligned}$$

[]

正确答案: A

解析:

【分析】 易见 $f(x) \geq 0$, 由于 $f_1(x)$ 是标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 是 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 因此有

$$f_1(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 是概率密度函数, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 a f_1(x) dx + \int_0^{+\infty} b f_2(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^3 \frac{b}{4} dx \\ &= \frac{a}{2} + \frac{3}{4}b = 1, \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2a + 3b = 4$. 故应选(A)。

填空题

9.

设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

正确答案: -1

解析:

【分析】 题设方程可改写为 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = x \int_0^x \sin t^2 dt$, 把它看成关于变量 x 的恒等式, 两端分别对 x 求导数可得

$$e^{-(x+y)^2} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \int_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{(x+y)^2} \int_0^x \sin t^2 dt + x e^{(x+y)^2} \sin x^2 - 1.$$

$$\text{令 } x = 0 \text{ 即知 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -1.$$

10.

设位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ ($e \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界区域为 G , 则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为_____.

正确答案: $\pi^2/4$

解析:

【分析】 所求旋转体的体积

$$V = \pi \int_e^{+\infty} y^2(x) dx = \pi \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)},$$

令 $\ln x = t$ 作换元, 则 $x; e \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t; 1 \rightarrow +\infty$, 且 $\frac{1}{x} dx = dt$, 代入即得

$$V = \pi \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \pi \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi \arctan t \Big|_1^{+\infty} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

11

设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1+p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

正确答案: $p e^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$

解析:

【分析】 按收益弹性的定义可知 $\frac{ER}{Ep} = \frac{p}{R} \frac{dR}{dp}$, 从而收益函数 $R(p)$ 应是微分方程 $\frac{p}{R} \frac{dR}{dp} = 1 + p^3$ 满足 $R(1) = 1$ 的特解. 分离变量可得

$$\frac{dR}{R} = (p^3 + \frac{1}{p}) dp,$$

两端积分可得通解 $\ln R = \frac{p^3}{3} + \ln p + C$, 把 $p = 1$ 时 $R(1) = 1$ 代入可确定常数 $C = -\frac{1}{3}$. 从而所求特

解为 $\ln R = \ln p + \frac{1}{3}(p^3 - 1)$,

由此可得收益函数 $R(p) = pe^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

12. 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

正确答案: 3

解析:

【分析】 计算可得 $y' = 3x^2 + 2ax + b$, $y'' = 6x + 2a$. 因为 $(-1, 0)$ 是拐点, 于是

$$y(-1) = a - b = 0, \quad y''(-1) = 2a - 6 = 0,$$

由此可得 $b = a = 3$.

13. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

正确答案: 3

解析:

【分析】 利用单位矩阵恒等变形, 有

$$A + B^{-1} = (B^{-1}B)A + B^{-1}(A^{-1}A) = B^{-1}(B + A^{-1})A = B^{-1}(A^{-1} + B)A.$$

可见 $|A + B^{-1}| = |B^{-1}| \cdot |A^{-1} + B| \cdot |A| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$.

14. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本. 记统计量 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $ET =$ _____.

正确答案: $\sigma^2 + \mu^2$

解析:

【分析】 根据简单随机样本的性质, X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且与总体同分布, 即 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 于是 $EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2, EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2$. 因此

$$ET = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) = \sigma^2 + \mu^2.$$

解答题

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{x}}$.

正确答案:

【解】 设 $f(x) = (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{x}}$, 则 $\ln f(x) = \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}$, 且由洛必达法则可得

$$J = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{\frac{1}{x}})' }{\frac{1}{x}(x^{\frac{1}{x}} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln x}{x}})' }{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, 于是当 $x \rightarrow +\infty$ 时有 $e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \sim \frac{\ln x}{x}$. 代入上式即得

$$J = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{\ln x} = -1.$$

故所求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{x}} = e^J = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

16. 计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 dx dy$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$ 围成.

正确答案:

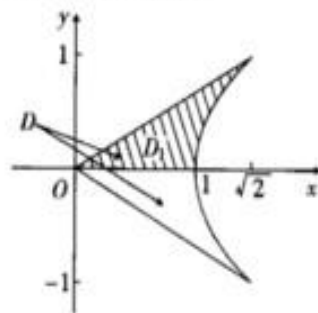
【解】 由题设知积分区域 D 的上边界是直线 $x - \sqrt{2}y = 0$, 下边界是直线 $x + \sqrt{2}y = 0$, 它们相交于坐标原点 $(0, 0)$, 而 D 的右边界则是双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的右支 $x = \sqrt{1 + y^2}$, 如图所示.

注意积分区域 D 关于 x 轴对称, 记 D_1 为 D 在 $y \geq 0$ 半平面的部分区域, 则 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1 + y^2}\}$, 于是所求二重积分

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x + y)^3 dx dy = \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy \\ &= \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy + \iint_D (3x^2y + y^3) dx dy. \end{aligned}$$

由于 $x^3 + 3xy^2$ 关于 y 是偶函数, 而 $3x^2y + y^3$ 关于 y 是奇函数, 所以

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2) dx dy + 0 = 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{x=\sqrt{2}y}^{x=\sqrt{1+y^2}} dy \\ &= 2 \int_0^1 \left[\frac{(1+y^2)^2}{4} - \frac{(\sqrt{2}y)^4}{4} + \frac{3}{2} y^2 (1+y^2 - 2y^2) \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (1 + 2y^2 - 3y^4) + 3y^2 (1 - y^2) \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \right) + 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{15} + \frac{6}{15} = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$



17. 求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

【解】 本题是条件极值问题, 可用拉格朗日乘数法求解. 为此引入拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10),$$

为求 $F(x, y, z, \lambda)$ 的驻点, 应解如下方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2y + 2\lambda z = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0, \end{cases}$$

从①, ②, ③式中消去 λ 可得驻点 (x, y, z) 应满足

$$\frac{y}{2x} = \frac{x+2z}{2y} = \frac{y}{z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = z, \\ 5x^2 = y^2, \end{cases}$$

代入④即可求得四个驻点 $P_1 = (1, -\sqrt{5}, 2)$, $P_2 = (1, \sqrt{5}, 2)$, $P_3 = (-1, -\sqrt{5}, -2)$, $P_4 = (-1, \sqrt{5}, -2)$. 代入计算有

$$u(P_1) = -5\sqrt{5}, \quad u(P_2) = 5\sqrt{5}, \quad u(P_3) = 5\sqrt{5}, \quad u(P_4) = -5\sqrt{5}.$$

从而知在 P_1 与 P_4 两点处 u 取得最小值 $-5\sqrt{5}$, 在 P_2 与 P_3 两点处 u 取得最大值 $5\sqrt{5}$. 即函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值是 $5\sqrt{5}$, 最小值是 $-5\sqrt{5}$.

18.

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 设 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

正确答案:

【解】 (I) 考虑函数 $f(t) = t - \ln(1+t)$, 当 $t \in [0, 1]$ 时, $f(t)$ 可导, 且 $f(0) = 0, f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} > 0$ 当 $t \in (0, 1]$ 时成立, 这表明函数 $f(t)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调增加, 即 $f(t) = t - \ln(1+t) > f(0) = 0$ 在 $(0, 1]$ 成立. 由此即得当 $t \in [0, 1]$ 时, $t \geq \ln(1+t)$ 且等号仅在 $t = 0$ 处成立. 由于函数 t 与 $\ln(1+t)$ 在 $[0, 1]$ 非负, 从而对 $n = 1, 2, 3, \dots$ 又有 $t^n \geq [\ln(1+t)]^n$ 在 $t \in [0, 1]$ 成立, 其中等号仅在 $t = 0$ 时成立. 这样一来又有

$$|\ln t| [\ln(1+t)]^n \leq t^n |\ln t|$$

在区间 $[0, 1]$ 上成立, 且等号仅在 $t = 0$ 与 $t = 1$ 成立. 故按定积分的性质即知对 $n = 1, 2, 3, \dots$ 有

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt.$$

(II) 利用 $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^n \ln t = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 易求得

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n |\ln t| dt &= - \int_0^1 t^n \ln t dt = - \int_0^1 \ln t d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) = - \frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = \frac{1}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

由(I)有

$$0 < u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

故由夹逼定理即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

19

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3).$$

(I) 证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $f'(\eta) = f(0)$;

(II) 证明存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

正确答案:

【证明】(I) 因函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 且 $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$, 由定积分中值定理即知 $\exists \eta \in (0,2)$, 使得 $f(\eta) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$, 即 $f(\eta) = f(0)$.

(II) 由题设 $f(0) = \frac{1}{2}[f(2) + f(3)]$ 可知, 当 $f(2) = f(3)$ 时必有 $f(0) = f(2) = f(3)$; 当 $f(2) \neq f(3)$ 时由闭区间上连续函数的性质可知, 存在 $\bar{\eta} \in (2,3)$ 使得

$$f(\bar{\eta}) = \frac{1}{2}[f(2) + f(3)] = f(0).$$

这样一来, 在闭区间 $[0,3]$ 上总有不相等的两点 $\eta \in (0,2)$ 与 $\bar{\eta} \in [2,3]$ 使得 $f(0) = f(\eta) = f(\bar{\eta})$. 分别在区间 $[0,\eta]$ 与 $[\eta,\bar{\eta}]$ 上对 $f(x)$ 应用罗尔定理知 $\exists \xi_1 \in (0,\eta)$ 与 $\xi_2 \in (\eta,\bar{\eta})$ 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. 由于 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的全部条件, 从而对 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理即知, $\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,3)$ 使得 $f''(\xi) = 0$.

20.

设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解,

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

正确答案:

【解】(I) 因为线性方程组 $Ax = b$ 有 2 个不同的解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < n$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

知 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 必有 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$. 此时线性方程组无解.

而当 $\lambda = -1$ 时,

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right].$$

若 $a = -2$, 则 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解.

故 $\lambda = -1, a = -2$.

(II) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时,

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

所以方程组 $Ax = b$ 的通解为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T + k(1, 0, 1)^T$, 其中 k 是任意常数.

21.

设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵. 若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求

a, Q .

正确答案:

【分析】 因为 Q 是正交矩阵 $\Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$, 所以 $Q^T A Q = \Lambda$, 即 $Q^{-1} A Q = \Lambda$. Λ 的对角线上的元素是 A 的特征值, Q 是 A 的特征向量.

【解】 按已知条件, $(1, 2, 1)^T$ 是矩阵 A 的特征向量, 设特征值是 λ_1 , 那么

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 + (-2) + 4 = \lambda_1, \\ -1 + 6 + a = 2\lambda_1, \\ 4 + 2a + 0 = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ a = -1. \end{cases}$$

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4),$

知矩阵 A 的特征值是: $2, 5, -4$.

对 $\lambda = 5$, 由 $(5E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得基础解系 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$.

对 $\lambda = -4$, 由 $(-4E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得基础解系 $\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$.

因为 A 是实对称矩阵, 特征值不同特征向量相互正交, 故只需把 α_2, α_3 单位化, 有

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T.$$

那么令 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, 则 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix}$.

22. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, 求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

正确答案:

【解法一】 利用泊松积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ 可得

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dx dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A\pi, \end{aligned}$$

计算得知 $A = 1/\pi$.

$$\begin{aligned} \text{又} \quad f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \cdot e^{-(y-x)^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}.$$

【解法二】 利用正态分布概率密度的积分为 1, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt &= 1, \\ 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dx dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\frac{1}{2})^2}} dy \\ &= A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2(\frac{1}{2})^2}} dx = A\pi, \end{aligned}$$

于是可得 $A = 1/\pi$.

$$\begin{aligned} \text{又} \quad f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \cdot e^{-(y-x)^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\frac{1}{2})^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}.$$

【解法三】 依题意 $f(x, y)$ 是以 e 为底的二元指数函数且其指数为 x, y 的二次三项式, 因此它是二元正态分布的联合概率密度, 即

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

易见参数 $\mu_1 = \mu_2 = 0$, 且 $-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} = -2$, $-\frac{2\rho}{2(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} = 2$, $-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} = -1$,

$$\text{解方程组} \quad \begin{cases} 4(1-\rho^2)\sigma_1^2 = 1, \\ 2(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2 = \rho, \\ 2(1-\rho^2)\sigma_2^2 = 1, \end{cases} \quad \text{可得} \quad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_2 = 1, \quad \rho = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

于是 $A = (2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^{-1} = 1/\pi$.

根据二维正态分布的边缘分布为一维正态分布, 于是有 $X \sim N(0, \frac{1}{2})$, 即

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2(\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

$$\text{因此} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}.$$

23. 箱中装有6个球,其中红、白、黑球的个数分别为1,2,3个.现从箱中随机地取出2个球,记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数.

(I) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $\text{Cov}(X, Y)$.

正确答案:

【解】 (I) (X, Y) 是二维离散型随机变量, X 只能取 0 和 1, 而 Y 可以取 0, 1, 2 各值, 由于

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{\text{取到2个黑球}\} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15},$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P\{\text{取到1个白球与1个黑球}\} = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15},$$

$$P\{X=0, Y=2\} = P\{\text{取到2个白球}\} = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

$$P\{X=1, Y=0\} = P\{\text{取到1个红球与1个黑球}\} = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15},$$

$$P\{X=1, Y=1\} = P\{\text{取到1个红球与1个白球}\} = \frac{C_1^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15},$$

$$P\{X=1, Y=2\} = P\{\emptyset\} = 0,$$

于是得 (X, Y) 的联合概率分布(表中最右一列与最下一行分别为关于 X 和关于 Y 的边缘概率分布):

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X=i\}$
0	3/15	6/15	1/15	2/3
1	3/15	2/15	0	1/3
$P\{Y=j\}$	6/15	8/15	1/15	

(II) 根据 (X, Y) 的联合概率分布表可以计算出

$$EX = \frac{1}{3}, \quad EY = \frac{2}{3}, \quad EXY = \frac{2}{15},$$

于是
$$\text{Cov}(X, Y) = EXY - EXEY = \frac{2}{15} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{45}.$$