

2012 年考研（数学一）真题试卷

全部题型 1. 选择题 2. 填空题 3. 解答题

选择题

下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

1. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为().

正确答案: C

2. 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) = ()$.

正确答案: A

3. 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续，那么下列命题正确的是().

- (A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微
- (B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微
- (C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在
- (D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在

正确答案: B

4. 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k=1, 2, 3$), 则有().

正确答案: D

5. 设, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为

任意常数, 则下列向量组线性相关的为().

正确答案: C

6. 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ = \quad , \quad$.

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(C) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(D) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

正确答案: B

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{x < y\} = (\quad)$.

正确答案: A

8. 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为 (\quad) .

正确答案: D

填空题

9. 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

正确答案: 齐次方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 得特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 则有通解 $f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$, 代入方程 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2c_1 e^x - c_2 e^{-2x} = 2e^x$, 则 $c_1 = 1, c_2 = 0$. 因此 $f(x) = e^x$.

10.

$$\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

正确答案: 根据题意, 令 $t = x - 1$, 则 $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx = \int_{-1}^1 (t + 1) \sqrt{1 - t^2} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

本题用到奇函数在对称区间上积分值为零的结论.

$$\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

11.

正确答案: 根据题意, 令

$$f(x, y, z) = xy + \frac{z}{y}, \text{ 则 } \frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{z}{y^2}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y}, \text{ 则由梯度定义, } \text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(y, x - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y} \right),$$

将点 $(2, 1, 1)$ 代入, 上式 $= (1, 1, 1)$.

$$12. \text{ 设 } \Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}, \text{ 则 } \iiint_{\Sigma} y^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\begin{aligned} \text{正确答案: } \iint_{\Sigma} y^2 ds &= \iint_D y^2 \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} \iint_D y^2 dx dy \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = \sqrt{3} \int_0^1 y^2 (1 - y) dy = \frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

其中 D 为 Σ 投影在 xOy 平面上的区域, $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$

13. 设 X 为三维单位列向量, E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $E - XX^T$ 的秩为_____.

正确答案: 根据题意设 $X = (1, 0, 0)^T$,

$$\text{则 } XX^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E - XX^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{显然 } E - XX^T \text{ 的秩为 } 2.$$

14. 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = 1/2$, $P(C) = 1/3$, 则 $P(AB | \overline{C}) =$ _____.

$$\text{由条件概率定义, 有 } P(AB | \overline{C}) = \frac{P(AB \overline{C})}{P(\overline{C})}$$

由题设 A, C 互不相容, 则 $AC = \emptyset, P(AC) = 0, P(ABC) = 0$,

而 $P(AB) = P(ABC) + P(AB \overline{C})$, 得 $P(AB \overline{C}) = \frac{1}{2}$, 而 $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = \frac{2}{3}$.

正确答案: 因此 $P(AB | \overline{C}) = \frac{3}{4}$.

解答题

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (-1 < x < 1).$

正 【证明】根据题意设 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 对其求一阶导数,

$$f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x = \ln \frac{1+x}{1-x} + x \frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x$$

$0 < x < 1$ 时, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \geq 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 因此有 $x \frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x \geq 0$, 得 $f'(x) \geq 0$,

因此 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq f(0) = 0$,

即 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq \frac{x^2}{2} + 1, \quad 0 < x < 1.$

16 而 $-1 < x < 0$ 时, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \leq 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 因此有 $x \frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x \leq 0$, 得 $f'(x) \geq 0$,

正 同样有 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq f(0) = 0$, 求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

所以, 结论得证.

$$\text{因为 } f'_x(x, y) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, f'_y(x, y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

令 $f'_x = 0, f'_y = 0$, 得函数 $f(x, y)$ 的驻点为 $(1, 0), (-1, 0)$.

$$\text{另 } A = f''_{xx} = -2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x(1 - x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$B = f''_{xy} = -y(1 - x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, C = f''_{yy} = x(y^2 - 1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

将 $(1, 0)$ 代入上面的 A, B, C 中, 得 $A = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0, B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 因此 $(1, 0)$ 是函数的极大值点, 极大值为 $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

将 $(-1, 0)$ 代入, $A = 2e^{-\frac{1}{2}} > 0, B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 因此 $(-1, 0)$ 是函数的极小值点, 极小值为 $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$.

正确答案:

$$\text{根据题意, 令 } u_n = \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} \cdot \frac{2(n+1) + 1}{4(n+1)^2 + 4(n+1) + 3} \right| = 1$$

令 $x^2 < 1$, 得 $-1 < x < 1$

$$\text{当 } x = \pm 1 \text{ 时, 题设级数} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1}$$

$$\text{由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1}}{\frac{1}{2n + 1}} = \infty, \text{ 级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} \text{ 是发散的, 因此 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} \text{ 发散.}$$

$$\text{有幂级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n} \text{ 的收敛域为 } (-1, 1).$$

$$\begin{aligned} \text{下面求和函数, 令 } S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n + 1)^2 + 2}{2n + 1} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n + 1} x^{2n} \end{aligned}$$

$$\text{令 } S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) x^{2n}, S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n + 1} x^{2n+1}, \text{ 则 } S(x) = S_1(x) + \frac{1}{x} S_2(x)$$

$$\text{其中 } S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' = \left[x \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n \right]' = \frac{x}{1 - x^2}$$

$$S_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n} = \frac{2}{1 - x^2}, S_2(x) = \int_0^x \frac{2}{1 - t^2} dt + S_2(0) = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$18. \text{ 已知曲线 } L: \begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \frac{x}{x}, \quad (-1 < x < 1)$$

$f'(t) > 0$, $(0 < t < \pi/2)$, 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离值恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积.

正确答案:

根据题意设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则 L 的切线方程为: $y - y_0 = k(x - x_0)$, 斜率 $k = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{f'(t)}$,

而切点与 x 轴交点为 $(x_0 - \frac{y_0}{k}, 0)$, 由已知 L 的切线与 x 轴交点到切点的距离值为 1,

$$\text{则有 } \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)y_0^2} = 1, \left(1 + \frac{(f'(t))^2}{\sin^2 t}\right)\cos^2 t = 1, f'(t) = \sin t \tan t.$$

$$f(t) = \ln|\sec t + \tan t| - \sin t + C \quad \text{由已知 } f(0) = 0, \text{ 得 } C = 0,$$

$$\text{则 } f(t) = \ln|\sec t + \tan t| - \sin t \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{所求面积为 } S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \tan t dt = \frac{\pi}{4}.$$

19. 已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段, 计算曲线积分

$$J = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy.$$

正确答案:

根据题意补充线段 L_1 为, $L_1: x=0, 0 \leq y \leq 2$, 则由题意, $L + L_1$ 所包围区域为平面上的有界闭区域, 记为 D , 则可利用格林公式计算

$$\begin{aligned} J &= \int_{L+L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy - \int_{L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \iint_D dx dy - \int_0^2 (-2y) dy = \frac{\pi}{2} + 4 \end{aligned}$$

20. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) 计算行列式 $|A|$.

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = B$ 有无穷多解, 并求其通解

正确答案:

$$(1) \text{ 根据题意有 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

(2) 设矩阵 A 的增广矩阵为 \bar{A} , 则

21. 已知,
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$$

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.

正确答案:

(1) 根据题意有, 二次型的秩为 2, 意即矩阵 $A^T A$ 的秩也为 2, $|A^T A| = 0$,

$$|A^T A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & a^2+3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & a^2+3 \end{vmatrix} + (1-a) \begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ 1+a^2 & 1-a \end{vmatrix} =$$

$(a^2+3)(a+1)^2 - 0$ 得 $a = -1$

22. 设二维离散型随机变量 X 、 Y 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X=2Y\}$;

(II) 求 $\text{Cov}(X-Y, Y)$ 与 ρ_{XY} .

正确答案:

$$(I) P\{X=2Y\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=2, Y=1\} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$(II) \text{Cov}(X-Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(Y, Y) = (EXY - EXEY) - [EY^2 - (EY)^2]$$

由题可得 X, Y 及 XY 的分布

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

$$\text{再分别求得 } EXY = \frac{2}{3}, EXEY = \frac{2}{3}, EY^2 = \frac{5}{3}, EY = 1$$

$$\text{因此, } \text{Cov}(X-Y, Y) = -\frac{2}{3}, \text{Cov}(X, Y) = 0, \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = 0.$$

23. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \delta^2)$ 与 $N(\mu, 2\delta^2)$, 其中 δ 是未知参数且 $\delta > 0$. 设 $Z = X - Y$

(1) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(2) 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 δ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(3) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 δ^2 的无偏估计量.

正确答案:

(1) 根据题意有 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$, 因此 $Z = X - Y$ 也服从正态分布.

$$E(Z) = E(X - Y) = EX - EY = \mu - \mu = 0, DZ = D(X - Y) = DX + DY = \sigma^2 + 2\sigma^2 = 3\sigma^2.$$

