

2012 年考研（数学三）真题试卷

全部题型 1. 选择题 2. 填空题 3. 解答题

选择题

下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

1. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

正确答案: C 2

2. 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) = ()$

正确答案: A $(-1)^{n-1}(n-1)!$

3. 设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr = ()$.

正确答案: B

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 则 α 的取值范围为 ()

正确答案: D $3/2 < \alpha < 2$

5. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$,

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的是 ().

正确答案: C $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$

6. 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ = ()$.

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

正确答案: B

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} =$ ().

正确答案: D $\pi / 4$

8. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本, 则统计量服从的

$$\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} \quad \text{分布为 ()}$$

正确答案: B $t(1)$

填空题

9.
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

正确答案:

根据题意有, $(\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = \exp\left[\frac{1}{\cos x - \sin x} \ln(\tan x)\right]$, 而 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\cos x - \sin x} = \frac{0}{0}$ 型洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x}{-\sin x - \cos x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin x + \cos x) \tan x \cos^2 x} = -\sqrt{2}. \text{ 因此, 原极限值} = e^{-\sqrt{2}}$$

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = \underline{\hspace{2cm}}.$

正确答案:

根据题意有, $y = f(f(x)) = \begin{cases} \ln \sqrt{f(x)}, & f(x) \geq 1 \\ 2f(x) - 1, & f(x) < 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln \sqrt{\ln \sqrt{x}}, & x \geq e^2 \\ 2\ln \sqrt{x} - 1, & 1 \leq x < e^2 \\ 2(2x - 1) - 1, & x < 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \ln \sqrt{\ln \sqrt{x}}, & x \geq e^2 \\ \ln x - 1, & 1 \leq x < e^2 \\ 4x - 3, & x < 1. \end{cases} \quad \text{因此, } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = (\ln x - 1)' \Big|_{x=e} = \frac{1}{x} \Big|_{x=e} = \frac{1}{e}$$

11.

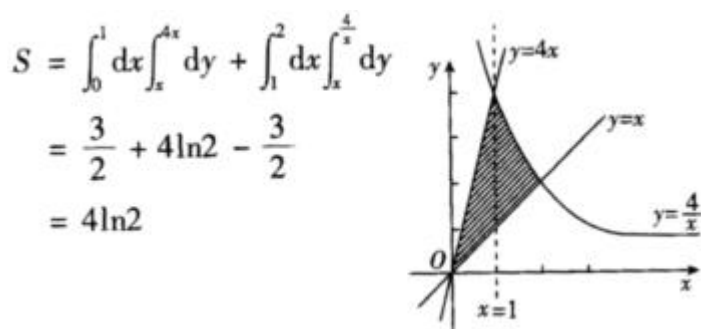
设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

正确答案

根据题意有, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$, 有 $f(x, y) - 2x + y - 2 = o(\sqrt{x^2 + (y - 1)^2})$, 则 $f(x, y) = 2x - y + 2 + o(\sqrt{x^2 + (y - 1)^2})$, $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,1)} = 2, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,1)} = -1$, 因此 $dz|_{(0,1)} = 2dx - dy$.

12. 由曲线 $y = 4/x$ 和直线 $y = x$ 及 $y = 4x$ 在第一象限中所围图形的面积为_____.

正确答案: 如右图, 阴影部分面积即为所求, 由直线 $x = 1$ 将阴影分为两部分, 则所求面积



13. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____.

正确答案: 根据题意, 设

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则由题知 $PA = B$, A 为 3 阶矩阵, 又 $|A| = 3$,

所以 $|A^*| = |A|^2 = 9$. 因此 $|BA^*| = |B| |A^*| = |PA| |A^*| = |P| |A| |A^*| = -27$.

14. 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容, $P(AB) = 1/2$, $P(C) = 1/2$, 则 $P(AB | C^c) =$ _____.

正确答案:

根据题意,由条件概率定义,有 $P(AB|\bar{C}) = \frac{P(ABC)}{P(C)}$,由题设 A, C 互不相容,则 $AC = \emptyset, P(AC) = 0, P(ABC) = 0$, 而 $P(AB) = P(ABC) + P(ABC)$, 得 $P(ABC) = \frac{1}{2}$, 而 $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = \frac{2}{3}$, 因此 $P(AB|\bar{C}) = \frac{3}{4}$.

解答题

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

正确答案

根据题意, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \cdot \frac{1 - e^{2-2\cos x - x^2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^{2-2\cos x - x^2} - 1)}{x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(2 - 2\cos x - x^2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2} = \frac{1}{12}.$$

16. 计算二重积分 $\iint_D e^x y dx dy$, 其中 D 是以曲线 $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

正确答案:

根据题意, $D = \left\{ (x, y) \mid 0 < x \leq 1, \sqrt{x} < y < \frac{1}{\sqrt{x}} \right\}$.

$$\begin{aligned} \iint_D e^x y dx dy &= \int_0^1 e^x dx \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^x (1 - x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^x dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^x dx \\ &= \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \left(x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx \right) = -\frac{1}{2} + \int_0^1 x e^x dx \\ &= -\frac{1}{2} + x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -\frac{1}{2} + e - e^x \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} + e - e + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

17. 某企业为生产甲、乙两种型号的产品,投入的固定成本为 10 000(万元),设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件)和 y (件),且固定两种产品的边际成本分别为 $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件)与 $6 + y$ (万元/件).

1)求生产甲乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元).

(2)当总产量为 50 件时,甲乙两种的产量各为多少时可使总成本最小?求最小成本.

(3)求总产量为 50 件时且总成本最小时甲产品的边际成本,并解释其经济意义

正确答案: (1)根据题意,设生产甲产品成本为 $C(x)$ (万元),生产乙产品成本为 $C(y)$ (万元)

$$\begin{aligned} \text{则总成本函数 } C(x, y) &= C(x) + C(y) + C_0 = \int_0^x (20 + \frac{t}{2}) dt + \int_0^y (6 + t) dt + 10\,000 \\ &= \frac{1}{4}x^2 + 20x + \frac{1}{2}y^2 + 6y + 10\,000 \end{aligned}$$

(2) $x + y = 50$, 求 $C(x, y)$ 的最小值.

$$\text{设 } F(x, y, \lambda) = \frac{1}{4}x^2 + 20x + \frac{1}{2}y^2 + 6y + 10\,000 + \lambda(x + y - 50)$$

$$\text{令 } \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} \frac{1}{2}x + 20 + \lambda = 0 \\ y + 6 + \lambda = 0 \\ x + y - 50 = 0 \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x = 24 \\ y = 26 \\ \lambda = -32 \end{cases}$$

因此(24, 26)为极值点,而由于实际问题一定存在最值,所以(24, 26)即为所求的最小值点,即甲产品产量为 24 件,乙产品产量为 26 件时,可使总成本最小,最小成本为 $C(24, 26) = 11\,118$ (万元).

(3)由(2),总产量为 50 件且总成本最小时,甲产品为 24 件,则此时甲产品的边际成本为 $20 + \frac{24}{2} = 32$ (万元/件)

经济意义:当生产甲产品 24 件时,每多生产一件甲产品,成本增加 32 万元.

18. 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, \quad -1 < x < 1.$

正确答案: 【证明】根据题意,设 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 对其求一阶导数,

$$f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x = \ln \frac{1+x}{1-x} + x \frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x$$

$$0 < x < 1 \text{ 时, 有 } \ln \frac{1+x}{1-x} \geq 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1, \text{ 因此有 } x \frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x \geq 0, \text{ 得 } f'(x) \geq 0, \text{ 所以}$$

$$f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq f(0) = 0,$$

$$\text{即 } x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

$$\text{而 } -1 < x < 0 \text{ 时, 有 } \ln \frac{1+x}{1-x} \leq 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1, \text{ 因此有 } x \frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x \leq 0, \text{ 得 } f'(x) \geq 0.$$

$$\text{同样有 } f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq f(0) = 0.$$

综上,可证得结论.

19. 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$,

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点

正确答案(I) 根据题意, 齐次方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$

得特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 则有通解 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, 代入方程 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x - C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 则 $C_1 = 1, C_2 = 0$. 因此 $f(x) = e^x$

(II) 由(I)知 $f(x) = e^x$, 则曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, 分别求它的一阶、二阶导数.

$$\text{得 } y' = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1, y'' = 2e^{x^2} (1 + 2x^2) \int_0^x e^{-t^2} dt + 2x$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$. 又当 $x > 0, y'' > 0$; $x < 0$ 时, $y'' < 0$.

$x = 0$ 时, $y(0) = 0$, 因此 $(0, 0)$ 为曲线拐点.

20. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 求 $|A|$.

(II) 已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 求实数 a 的值, 并求 $Ax = \beta$ 的通解

正确答案·

$$(1) \text{ 根据题意, } |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

(2) 根据题意, 设矩阵 A 的增矩阵为 \bar{A} , 则

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{array} \right) \text{ 要使方程组 } Ax = \beta \text{ 有无穷多解, 必须有 } 1 - a^4 = 0 \text{ 且 } -a - a^2 = 0,$$

得 $a = -1$, 代入 \bar{A}

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

得 $Ax = \beta$ 的一个特解为 $(1, 0, 1, 1)^T$, $Ax = 0$ 的通解为 $k(1, 1, 1, 1)^T$, 因此 $Ax = \beta$ 的通解为 $k(1, 1, 1, 1)^T + (1, 0, 1, 1)^T$, k 为任意常数.

21. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$ 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$ 的秩为 2

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形

正确答案: (1) 根据题意, 二次型的秩为 2, 意即矩阵 $A^T A$ 的秩也为 2, $|A^T A| = 0$

$$|A^T A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & a^2+3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & a^2+3 \end{vmatrix} + (1-a) \begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ 1+a^2 & 1-a \end{vmatrix} = (a^2+3)(a+1)^2 = 0$$

得 $a = -1$

(2) 根据题意, 将 $a = -1$ 代入 $A^T A$ 中, 得 $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

令 $|\lambda E - A^T A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6) = 0$ 得 $A^T A$ 的特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$$

分别将特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 代入 $(\lambda_i E - A^T A)x = 0$, 求得对应各自特征值的特征向量为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

再分别将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化得 $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

则令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x = (Qy)^T(A^T A)(Qy) = y^T Q^T A^T A Q y = 2y_2^2 + 6y_3^2$ 即为 f 的标准形

22. 设二维离散型随机变量 X, Y 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X=2Y\}$

(II) 求 $\text{Cov}(X-Y, Y)$ 与 ρ_{XY}

正确答案

(I) 根据题意, $P\{X=2Y\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=2, Y=1\} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$

(II) $\text{Cov}(X-Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(Y, Y) = (EXY - EXEY) - [EY^2 - (EY)^2]$

由题意可得 X, Y 及 XY 的分布

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

再分别求得 $EXY = \frac{2}{3}, EXEY = \frac{2}{3}, EY^2 = \frac{5}{3}, EY = 1,$

因此 $\text{Cov}(X-Y, Y) = -\frac{2}{3}, \text{Cov}(X, Y) = 0, \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = 0$

23. 设随机变量 X 和 Y , 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布, $V = \min(X, Y)$, $U = \max(X, Y)$

求 (1) 随机变量 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(2) $E(U+V)$.

正确答案: (1) 根据题意, X, Y 均服从参数为 1 的指数分布, 则有

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$F_V(v) = P\{V \leq v\} = P\{\min(X, Y) \leq v\} = 1 - P\{\min(X, Y) > v\} \\ = 1 - P\{X > v, Y > v\} = 1 - P\{X > v\}P\{Y > v\}$$

当 $v \leq 0$ 时, $F_V(v) = 0$;

$$v > 0 \text{ 时}, F_V(v) = 1 - \int_v^{+\infty} e^{-x} dx \int_v^{+\infty} e^{-y} dy = 1 - e^{-2v}$$

$$\text{因此 } F_V(v) = \begin{cases} 1 - e^{-2v}, & v > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_V(v) = F'_V(v) = \begin{cases} 2e^{-2v}, & v > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$(2) E(U+V) = E[\max(X, Y) + \min(X, Y)] \\ = E(X+Y) = EX + EY = 1 + 1 = 2$$