

2012 年研究生入学考试（数二）真题试卷

全部题型 1. 选择题 2. 填空题 3. 解答题

选择题

下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

1. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线条数为().

正确答案: C 2

2. 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) = ()$.

正确答案: A $(-1)^{n-1}(n-1)!$

3. 设 $a_n > 0 (n=1, 2, 3, \cdots)$, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的().

正确答案: B B. 充分非必要条件

4. 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k=1, 2, 3$)，则有().

正确答案: D $I_2 < I_1 < I_3$

5. 设函数 $f(x, y)$ 为可微函数，且对任意的 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ ，则使不等式 $f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是().

正确答案: A $x_1 > x_2, y_1 < y_2$

6. 设区域 D 由曲线 $Y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成，则 $\iint_D (x^2 y - 1) dx dy = ()$.

正确答案: D $-\pi$

7. 设, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2,$

c_3, c_4 均为任意常数，则下列向量组线性相关的是().

正确答案: C $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$

8. 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

若 $P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q=(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ=(\quad)$.

正确答案: B

填空题

9. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数, 则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\underline{\hspace{2cm}}$.

正确答案: 根据题意将 $x=0$ 代入方程 $x^2-y+1=e^y$, 得 $y=0$, 在方程 $x^2-y+1=e^y$ 两端对 x 求一阶导, 得 $2x-y'=y'e^y$, 将 $x=0, y=0$ 代入得 $y'(0)=0$

再在 $2x-y'=y'e^y$ 两端对 x 求一阶导, 得 $2-y''=y''e^y+(y')^2e^y$, 将 $y=0, y'=0$ 代入得 $y''(0)=1$,

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=1.$$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

正确答案:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{1+n^2} + \frac{n^2}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

11 设 $z=f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

正确答案

$$\begin{aligned} z &= f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right), \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} f', \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} f', \\ x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} &= x \cdot \frac{1}{x} f' + y^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) f' = 0 \end{aligned}$$

12. 微分方程 $ydx + (x - 3y^2)dy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

正确答案:

根据题意由 $ydx + (x - 3y^2)dy = 0$, 得 $\frac{dx}{dy} = 3y - \frac{x}{y}$, $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 3y$

此即为 x 对于 y 的一阶线性微分方程, 直接利用通解公式, 可得

$$x = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left[\int 3ye^{\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right] = \frac{1}{y}(y^3 + C), \quad C \text{ 为常数.}$$

由于已知 $x = 1$ 时, $y = 1$, 代入通解中, 得 $C = 0$, 所以方程的解为 $x = y^2$, 得 $y = \sqrt{x}$ (符合题意), $y = -\sqrt{x}$ 由条件 $y|_{x=1} = 1$ 舍去.

13. 曲线 $y = x^2 + x (x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

正确答案: 根据题意由于 $y' = 2x + 1$, $y'' = 2$

$$\text{曲率 } k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[1 + (2x + 1)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得 } x = 0 \text{ (由已知条件舍去)}, x = -1.$$

$x = -1$ 时, $y = 0$, 所以坐标为 $(-1, 0)$.

14. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , 则 $|BA^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

正确答案: 根据题意设 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则由题知 $PA = B$, A 为 3 阶矩阵, 又 $|A| = 3$, 所以 $|A^*| = |A|^2 = 9$.

因此 $|BA^*| = |B| |A^*| = |PA| |A^*| = |P| |A| |A^*| = -27$.

解答题

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$, 记 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 求常数 k 的值

正确答案

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 根据题意 } a &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2 - \sin x}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2 - \sin x}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^2} \\
 &= 1 + 0 = 1 \\
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2 - \sin x - x \sin x}{x^{k+1} \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2 - \sin x - x \sin x}{x^{k+2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)(1+x)}{x^{k+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^{k+2}}
 \end{aligned}$$

由已知 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则有 $k+2=3, k=1$.

16.

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

正确答案:

根据题意, 由于 $f'_x(x, y) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, f'_y(x, y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$
 令 $f'_x = 0, f'_y = 0$, 得函数 $f(x, y)$ 的驻点为 $(1, 0), (-1, 0)$.
 再求 $A = f''_{xx} = -2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = x(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$
 $B = f''_{xy} = -y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, C = f''_{yy} = x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$
 将 $(1, 0)$ 代入上面的 A, B, C , 中, 得 $A = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0, B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 所以 $(1, 0)$ 是函数的极大值点, 极大值为 $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}},$
 将 $(-1, 0)$ 代入, $A = 2e^{-\frac{1}{2}} > 0, B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 所以 $(-1, 0)$ 是函数的极小值点, 极小值为 $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}},$

17. 过 $(0, 1)$ 点作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成, 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

正确答案: 根据题意, 设切点 A 的坐标为 (x_0, y_0) , 切线方程的斜率为 k , 则 $y_0 - 1 = kx_0$, 又

$k = \frac{1}{x_0}, y_0 = \ln x_0$, 解得 $x_0 = e^2, y_0 = 2, k = \frac{1}{e^2}$. 得切线方程为: $y = \frac{1}{e^2}x + 1$, 切点 $A(e^2, 2)$, L 与 x 轴的交点 B 为 $(-1, 0)$, 可知直线 AB 的方程 $l_{AB}: y = \frac{2}{e^2 - 1}(x - 1)$

$$\begin{aligned} \text{区域 } D \text{ 的面积为: } S &= \int_1^{e^2} \ln x dx - \int_1^{e^2} \frac{2}{e^2 - 1}(x - 1) dx \\ &= x \ln x \Big|_1^{e^2} - x \Big|_1^{e^2} - \frac{2}{e^2 - 1} \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right) \Big|_1^{e^2} \\ &= e^2 + 1 - (e^2 - 1) = 2 \end{aligned}$$

D 绕 X 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx - \pi \int_1^{e^2} \left[\frac{2}{e^2 - 1}(x - 1) \right]^2 dx \\ &= \pi(2e^2 - 2) - \pi \frac{4(e^2 - 1)}{3} = \frac{2}{3}\pi(e^2 - 1) \end{aligned}$$

18. 计算二重积分, $\iint_D xy d\sigma$ 其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 与极轴围成

正确答案: 根据题意, 令 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_D xy d\sigma &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho \\ &= \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{1+\cos\theta} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^4 \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^4 \cos \theta d\cos \theta = -\frac{1}{4} \int_1^{-1} (1 + u)^4 u du = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

19. 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$,

(1) 求 $f(x)$ 的表达式

(2) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点

正确答案: (1) 根据题意, 齐次方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 得特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 则有通解 $f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$, 代入方程 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2c_1 e^x - c_2 e^{-2x} = 2e^x$, 则 $c_1 = 1, c_2 = 0$. 因此 $f(x) = e^x$.

(2) 由(1)知 $f(x) = e^x$, 则曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, 分别求它的一阶、二阶

导数, 得 $y' = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1, y'' = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) \int_0^x e^{-t^2} dt + 2x$,

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$. 又当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$; $x < 0$ 时, $y'' < 0$
 $x = 0$ 时, $y(0) = 0$, 因此 $(0, 0)$ 为曲线拐点.

22. 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, \quad (-1 < x < 1).$

正确答案:

【证明】根据题意, 设 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 求一阶导数,

$$f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x = \ln \frac{1+x}{1-x} + x \frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x$$

$0 < x < 1$ 时, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \geq 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 因此有 $x \frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x \geq 0$, 得 $f'(x) \geq 0$,

所以 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq f(0) = 0$,

即 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq \frac{x^2}{2} + 1, \quad 0 < x < 1$

而 $-1 < x < 0$ 时, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \leq 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 因此有 $x \frac{1+x^2}{1-x^2} - \sin x \leq 0$, 得 $f'(x) \geq 0$,

同样有 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq f(0) = 0$,

综上, 可证得结论.

21. (1) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ (n 为大于 1 的整数), 在区间 $(1/2, 1)$ 内有且仅有一个实根;

(2) 记 (1) 中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

正确答案: (1) 证明: 根据题意, 令 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$,

$$\text{则 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,$$

$f(1) = 1^n + 1^{n-1} + \cdots + 1 - 1 = n - 1 > 0$, 因此由零点定理知 $f(x) = 0$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内至少有一实根.

$$\text{又 } f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 0, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

故 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上是单调递增函数, 所以 $f(x) = 0$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实根.

(2) 根据题意, 有 $f(x_n) = 0$, 又 $f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 1, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

又设 $F(x) = f(x) + 1 = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$, 则 $F(x_n) = 1$

$$\text{则有 } \frac{F(x_n) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{x_n - \frac{1}{2}} = F'(\xi), \frac{1}{2} < \xi < x_n$$

$$\left| \frac{F(x_n) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{x_n - \frac{1}{2}} \right| = |F'(\xi)| > 1, \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \leq \left| F(x_n) - F\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| 1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \right| = \frac{1}{2^n}$$

由夹逼定理, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x_n - \frac{1}{2} \right| = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

22. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) 计算行列式 $|A|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解

正确答案

(1) 根据题意, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$

(2) 根据题意, 设矩阵 A 的增广矩阵为 \bar{A} , 则

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{array} \right)$$

要使方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 必须有 $1 - a^4 = 0$ 且 $-a - a^2 = 0$, 可知 $a = -1$ 代入 \bar{A}

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

得 $Ax = \beta$ 的一个特解为 $(1, 0, 1, 1)^T$, $Ax = 0$ 的通解为 $k(1, 1, 1, 1)^T$, 因此 $Ax = \beta$ 的通解为 $k(1, 1, 1, 1)^T + (1, 0, 1, 1)^T$, k 为任意常数.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

23. 已知,

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x$ 的秩为 2,

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为标准形.

正确答案:

(1) 根据题意,二次型的秩为 2,意即矩阵 $A^T A$ 的秩也为 2, $|A^T A| = 0$,

$$\begin{aligned} |A^T A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & a^2+3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & a^2+3 \end{vmatrix} + (1-a) \begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ 1+a^2 & 1-a \end{vmatrix} \\ &= (a^2+3)(a+1)^2 = 0, \\ &\text{得 } a = -1 \end{aligned}$$

(2) 将 $a = -1$ 代入 $A^T A$ 中,得 $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\text{令 } |\lambda E - A^T A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6) = 0$$

得 $A^T A$ 的特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

分别将特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 代入 $(\lambda E - A^T A)X = 0$,求得对应各自特征值的特征向量为

$$\xi_1 = (1, 1, -1)^T \quad \xi_2 = (1, -1, 0)^T \quad \xi_3 = (1, 1, 2)^T$$

再分别将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化,得 $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^T$

令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x = (Qy)^T (A^T A) (Qy) = y^T Q^T A^T A Q y = 2y_2^2 + 6y_3^2$ 即为 f 的标准形.